

**Dr. Paul A. Truttmann**

# **Wahrscheinlichkeit + Statistik (I)**

**Mathematische Methoden zur  
Entscheidungsfindung**

Nachdiplomstudium «Leadership und Management NDS HF»

## Inhalt

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Wahrscheinlichkeit und Statistik .....</b> | <b>2</b>  |
| 1.1      | Einführung, Grundbegriffe .....               | 2         |
| 1.2      | Wahrscheinlichkeit.....                       | 5         |
| 1.3      | Normalverteilung .....                        | 7         |
| 1.4      | Tests .....                                   | 9         |
| 1.5      | Entscheidungsbäume .....                      | 11        |
| 1.6      | Bedienungstheorie; Poissonv. ....             | 13        |
| 1.7      | Mehrkanalsystem.....                          | 17        |
| 1.8      | Treffer, Niete; Binomialvert.....             | 19        |
| 1.9      | Übungen .....                                 | 21        |
| 1.10     | Lösungen zu den Übungen .....                 | 22        |
| <br>     |   |           |
| <b>2</b> | <b>Entscheidungstheorie .....</b>             | <b>23</b> |
| 2.1      | Musterbeispiel.....                           | 23        |
| 2.2      | Ein - Parameter Regeln .....                  | 24        |
| 2.3      | Zwei - Parameter - Regeln .....               | 28        |
| 2.4      | Nutzwertanalysen .....                        | 29        |



# 1 Wahrscheinlichkeit und Statistik

## 1.1 Einführung, Grundbegriffe

### Zufallsexperiment

Zwanzig Menschen sollen die Höhe eines Baumes schätzen. Sie dürfen nicht miteinander schwatzen und sollen ihre Schätzung auf ein Blatt schreiben. Dann werden die Schätzungen gesammelt. Die Zahlen könnten dann z.B. so lauten:

(17.5, 18, 18, 22, 13, 24, 21, 19, 16, 23, 23, 17.5, 24.5, 16, 18, 19, 25, 21, 20, 20)

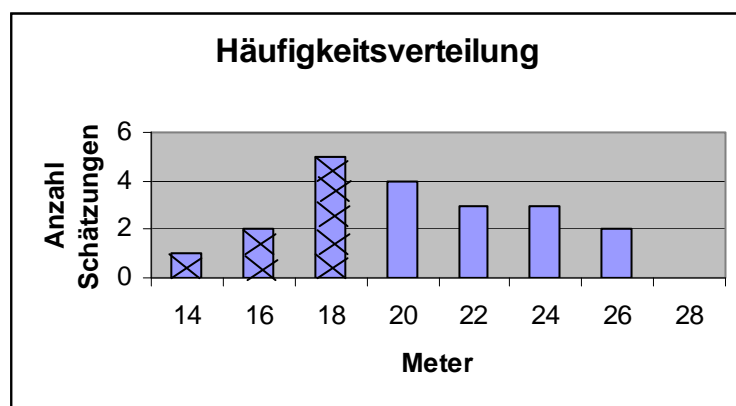
Diese Schätzung nennt man *Zufallsexperiment*. Die einzelnen Meterzahlen sind "zufällig". Viele reale Vorgänge können als Zufallsexperimente aufgefasst werden:

- Die Kurse einer Aktie während einer bestimmten Zeitspanne
- Die Verkaufszahlen je Monat
- Die Anzahl fehlerhafter Produkte (z.B. Glühbirnen, die nicht brennen) während eines Produktionsprozesses

Die mathematischen Themen "Statistik" und "Wahrscheinlichkeitsrechnung" beschreiben solche Zufallsprozesse.

### Häufigkeitsverteilung

Wir wählen eine 2- Meter - Einteilung als horizontale Achse auf einem karierten Papier und machen für jede genannte Meterzahl ein Kreuzchen. Dadurch entsteht eine Grafik der untenstehenden Art. Man nennt sie "Häufigkeitsverteilung"



### Mittelwert ( $\mu$ )

Wie kann man den "Buckel" der Häufigkeitsverteilung charakterisieren? Sicher mit einer Zahl für "den höchsten Punkt". Meist nimmt man dazu den Durchschnitt. Die gescheiten Mathematiker reden dann von *Mittelwert*( $\mu$ : Mü).



### Streuung( $\sigma$ )

Man sollte auch etwas über die Breite des Buckels sagen.  
Schmäler Buckel = gute Schätzung  
Breiter Buckel = schlechte Schätzung  
Man könnte z.B. den kleinsten und den grössten Wert voneinander abziehen (Spannweite). Die Mathematiker rechnen kompliziert eine Zahl aus, die sie *Streuung* ( $\sigma$ : *Sigma*) nennen. Sie wird als Summe der Quadrate der Abweichungen vom Mittelwert berechnet. Wir machen das gescheiter mit Excel oder später mit einer Faustregel (siehe 1.3).

### Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Höhe der Häuschensäule (z.B. bei 18 m) gibt Auskunft über die Chance, dass jemand den Baum auf 17 oder 18 m hoch schätzt. Statt Chance sagen Mathematiker *Wahrscheinlichkeit*.

### Berechnung mit Excel

Schreibe die Zahlen in die *Spalte* (z.B. A) eines Excel Blattes. Markiere eine freie Zelle Z.B. H3.  
Wähle  $f_x$  und dann Statistik/Mittelwert  
Schreibe: *Mittelwert(A1:A20)*, <Enter>  
Es sollte 19.78 heraus kommen.  
Analog für die Streuung. In Excel "Standardabweichung"

| A     | B | C  | D | E | F | G | H     |                      |  |  |  |  |  |  |  |
|-------|---|----|---|---|---|---|-------|----------------------|--|--|--|--|--|--|--|
| 17.50 |   | 14 | 1 |   |   |   |       |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| 18.00 |   | 16 | 2 |   |   |   |       |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| 18.00 |   | 18 | 5 |   |   |   | 19.78 | Mittelwert           |  |  |  |  |  |  |  |
| 22.00 |   | 20 | 4 |   |   |   |       |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| 13.00 |   | 22 | 3 |   |   |   | 3.177 | Standardabw/Streuung |  |  |  |  |  |  |  |
| 24.00 |   | 24 | 3 |   |   |   |       |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| 21.00 |   | 26 | 2 |   |   |   |       |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| 19.00 |   | 28 | 0 |   |   |   |       |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| 16.00 |   |    |   |   |   |   |       |                      |  |  |  |  |  |  |  |
| 23.00 |   |    |   |   |   |   |       |                      |  |  |  |  |  |  |  |

### 1.1.1 Wie erzeugt man das Diagramm?

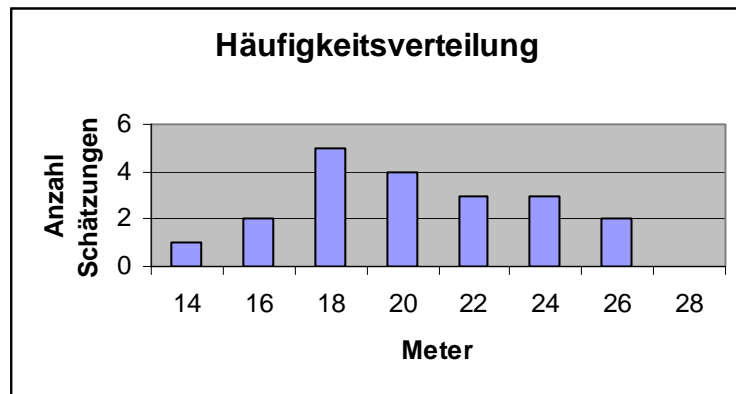
#### Häufigkeiten berechnen lassen

Zuerst muss man von Hand die Grenzen eintragen. Hier in C1 bis C8. Die 14 bedeutet: von 0 bis 14  
Die 16 bedeutet: von 14.1 bis 16 usw.  
Wichtig: als Spalte!!  
Daneben eine gleich lange Spalte schwarz markieren.  
Wähle  $f_x$  und dann Statistik/Häufigkeit  
Daten: A1:A20  
Kategorien: C1:C8  
Drücke: <shift><ctrl><Enter>  
Dies muss man immer tun, wenn Excel mehrere Zahlen auf ein Mal berechnen muss.



Diagramm zeichnen  
lassen

Eine freie Zelle markieren.  
Auf den Menükopf Diagramm klicken (Einfügen/Diagramm)  
und "Säulen" wählen.  
In Feld für Daten: *D1:D8*  
Reihe klicken  
Beschriftung Rubrikenachse: *=Tabelle1!\$C\$1:\$C\$8*  
Name: *Häufigkeitsverteilung*  
Wenn man Glück hat geht's!!!



## 1.2 Wahrscheinlichkeit

### Definition

#### Wahrscheinlichkeit (W)

Wahrscheinlichkeit ist das Gleiche wie "Chance". Man gibt sie mit einer Zahl zwischen 0 und 1 an. Z.B: Die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eine 6 zu werfen ist 0.16. Der Volksmund sagt: "Die Chance eine 6 zu würfeln ist 16 %."

#### W = Günstige/Mögliche

Wie kommt man auf 0.16 resp. 16%? Es gibt 2 Methoden;

a)  $W = \text{günstige Fälle} / \text{alle möglichen Fälle}$   
beim Würfel:  $1 / 6 = 0.16$

#### W = relative Häufigkeit

b)  $W = \text{relative Häufigkeit}$ :

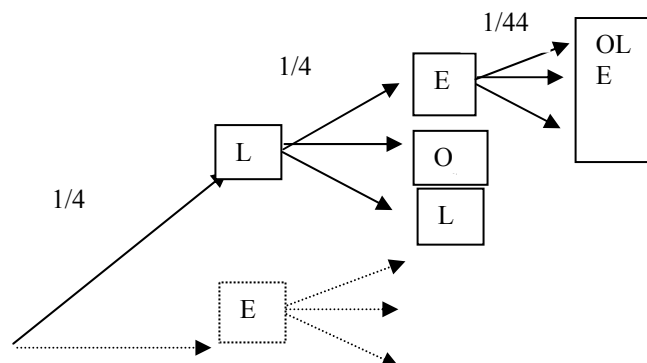
Wie beim Schätzen der Baumhöhe, könnte man auch den Würfel oft Werfen (200 mal) und dann zählen, wie oft die 1, die 2 usw. gewürfelt wurden. Aus der Häufigkeitsverteilung könnte man die Wahrscheinlichkeit ablesen, indem man die Höhe der Säule für die 6 durch 200 teilt. (relative Häufigkeit)  
Test: Wie gross ist Wahrscheinlichkeit, dass jemand den Baum auf 17 oder 18 Meter schätzt ist? (5/20)

### Entscheidungsbäume

Oft bestehen Zufallsexperimente aus mehreren Schritten. In einem Sack sind z.B. Zettel mit den Buchstaben O, L, A, E. Man lässt jemanden 3 Zettel ziehen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er das Wort LEO zieht?

### Ziehen mit zurücklegen

Man zieht einen Zettel, notiert den Buchstaben und legt den Zettel in den Sack zurück.



**Ziehen ohne zurücklegen** Man zieht einen Zettel und legt ihn vor sich hin, dann zieht man den nächsten.

**Bedingte Wahrscheinlichkeit** Beim Zweiten Zug hat es nur noch drei Zettel im Sack. Die Wahrscheinlichkeit ändert sich (1/3). Sie ist davon abhängig, *was vorher geschah*.

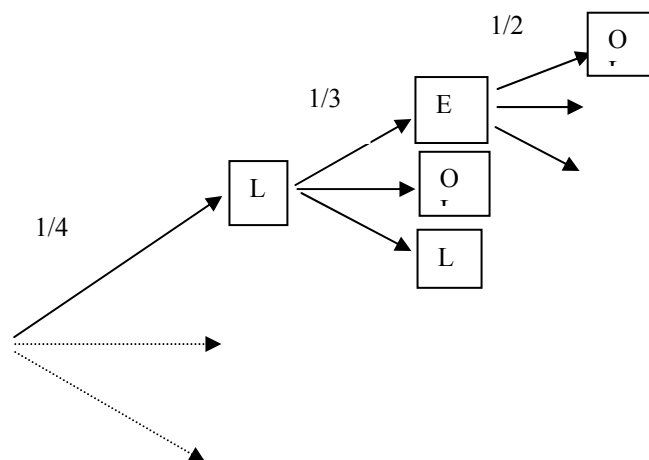
**Reihenfolge** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das Wort Leo bilden zu können? Das heisst es kommt nicht darauf an, in welcher Reihenfolge gezogen wird. Es muss bloss ein E, ein O, und ein L sein. Man erahnt, dass man mit solchen Spielchen ganz knifflige Aufgaben konstruieren kann. Diese Theorie nennt man Kombinatorik. Sie interessiert uns weniger.

**Zufallsvariable, Erwartungswert** Angenommen, dass LEO - Spielchen werde mit einem Einsatz und einem Gewinn gespielt. Nehmen wir an man müsste 5 Fr. Einsatz leisten um ziehen zu können und man gewinne 100 Fr. wenn man LEO erhalte (mit zurücklegen). Man kann dann die Frage stellen, wie viel Geld man auf lange Sicht gewinnt oder verliert. Man sagt, es interessiert uns der "Erwartungswert"  $\langle G \rangle$  der Variablen "Geld".

$$\langle G \rangle = 1/64 * 100 - 63/64 * 5 = -3.36$$

Gewinn = Wahrsch\*Franken - Verlust-Wahrsch\* Franken

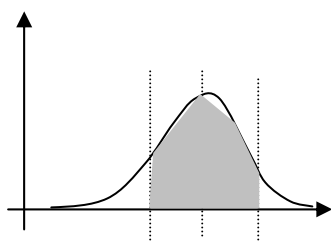
Auf lange Sicht verliert man pro Spiel 3.36 Fr.



## 1.3 Normalverteilung

### Sehr viele Schätzer Grenzwert

Wenn ganz viele Menschen unseren Baum schätzen, dann wird unser Säulendiagramm immer regelmässiger. Es nähert sich einer Kurve, die wie ein Glocke aussieht. Eine solche Häufigkeitsverteilung heisst *Normalverteilung*. Sie hat ein paar ausserordentliche Eigenschaften und spielt eine grosse Rolle in analytischen Entscheidungsprozessen. Im Folgenden wollen wir annehmen, dass der Mittelwert dann 20 und die Standardabweichung 3.2 sei.



### 2 - Sigma - Bereich

Geht man vom Mittelwert einer Normalverteilung eine Standardabweichung nach oben und eine nach unten, so ergibt sich ein Band in dem 68 % aller Werte (Schätzungen) liegen. In unserem Beispiel erstreckt sich das Band von 16.8 bis 23.2. 68 % aller Schätzer nennen also eine Meterzahl die grösser als 16.8 und kleiner als 23.2 ist.

Innerhalb eines 2 Sigma Bandes (also von 13.6 bis 26.4) liegen 95 % aller Schätzungen.

### Aufgabe: Signifikanz - Niveau

Wir wollen eine Meterzahl finden, so dass nur noch 3% der Menschen den Baum höher als diese Zahl schätzen. Mathematiker nennen die Meter-Zahl "Grenze" und die %-Zahl *Signifikanzniveau*.

### Lösung: "Testen" mit der Normalverteilung

Die Aufgabe lösen wir wiederum mit Excel. Die Funktion `normvert(x, Mittelwert, Standardabweichung, wahr)` berechnet die gesamte Wahrscheinlichkeit bis zur Grenze x.

$$\text{Normvert}(25,20,3.2,\text{wahr}) = 0.94$$

$$\text{Normvert}(26,20,3.2,\text{wahr}) = 0.9696$$

Die Grenze liegt also etwa bei 26. Das heisst weniger als 3 % der Leute schätzen den Baum höher als 26 m.

### Aufgabe: Soll Marthaler in Zürich bleiben?

Beim „Theater“ um den Theaterdirektor Marthaler in Zürich hat man eine Umfrage bei 490 Leuten gemacht. Die Mehrheit sei dafür, dass er in Zürich bleibe, nämlich 58 %. Ist diese Aussage zuverlässig (signifikant)? D.h. würde bei einer nächsten Umfrage - bei zufällig ausgewählten Leuten - wieder herauskommen, dass eine Mehrheit will, dass er bleibt oder waren die 58 % bloss ein Zufallstreffer?





## Faustregel

Normalerweise braucht man ein einfacheres Verfahren um schnell abschätzen zu können, ob eine Aussage, die man durch eine Umfrage erhalten hat, zuverlässig sei. Man berechnet das Sigma ( $\sigma$ ) mit folgender Faustregel:

$$\sigma = \sqrt{\text{Zählrate}}$$

## Bei Marthaler

Ja Stimmen: 284 (58 % von 490)

$$\sigma = \sqrt{284} = 17 \quad (\text{Sigma in Zahlen})$$

$$\sigma = 17/490 = 3.5 \% \quad (\text{Sigma in \%})$$

$$58 \pm 3.5 \%$$

## Beurteilung

Wenn eine weitere Umfrage gemacht würde, dann liegt ihr Resultat mit 68 % Wahrscheinlichkeit im Bereich zwischen 54.5 % bis 61.5 %. Die Aussage ist also verlässlich. D.h. auch bei einer weiteren Umfrage wären die Ja Stimmen über 50 %.

## Aufgabe Umsatzschwankung

Eine Unternehmung hat 11 grosse Kunden. Diese Kunden erteilen ihr Grossaufträge. Sie machte 2001 mit ihnen 1 350 000 Umsatz. Im 2002 ist der Umsatz auf 1 050 000 gesunken. Handelt es sich um eine zufällige Schwankung oder ist das Geschäft tatsächlich geschrumpft?

## Lösung

Mit einem Kunden (Grossauftrag) macht man im Durchschnitt einen Umsatz von  $1\,350\,000 / 11 = 123\,000$  Fr pro Jahr. Ob ein Kunde aber einen Auftrag gerade im 2002 gibt oder ob der Auftrag erst 2003 kommt, ist zufällig.

Die Schwankung ist  $\sigma = \sqrt{11} = 3.3$

In Zahlen: Der Umsatz schwankt pro Jahr um  $3 * 123\,000 = 369\,000$  Fr. Es handelt sich nicht um eine reale Verkleinerung des Geschäftes sondern die Schwankung ist zufällig.

## Musteraufgabe Einkäuferin (schwierig)

Sie sind Einkäuferin in einer Detailhandelskette. Die Gross-Bäckerei liefert Ihnen 1 kg Brote und behauptet, bloss 5 % der Brote hätten ein Gewicht von weniger als 975 g. Aufgrund von Kundenreklamationen gehen Sie der Sache auf den Grund und lassen zufällig 100 dieser Brote wägen. Wie gross darf die Streuung (Sigma) maximal sein, damit die Lieferantenbehauptung noch stimmt?

Die Lösung findet man am Einfachsten mit Prübeln.

$$\text{Normvert}(975;1000;10;\text{wahr}) = 0.0062$$

$$\text{Normvert}(975;1000;15;\text{wahr}) = 0.0478$$

$$\text{Normvert}(975;1000;16;\text{wahr}) = 0.059$$

Die Streuung darf als nicht grösser als 15 g sein.



## 1.4 Tests

|                        |  |
|------------------------|--|
| <b>Stichprobe</b>      | Wenn die Einkaufsleiterin im vorangegangenen Beispiel 100 Brote wägen lässt, so sagt man, sie <i>zieht eine Stichprobe</i> . Eigentlich genau wie beim Käse, wo man von aussen auch nicht sehen kann, ob er innen reif ist. Deshalb sticht man mit einem Stichtmesser in den Käse und zieht einen kleinen "Bohrkern" heraus, um ihn zu probieren.  |
| <b>Grundgesamtheit</b> | Alle Brote - die gemäss Behauptung des Brotlieferanten einen Mittelwert = 1000 g, und eine Streuung < 15 g aufweisen - nennt man <i>Grundgesamtheit</i> .  |
| <b>t - test</b>        | <p>Beim Qualitätstest von Massengütern geht es jetzt darum zu überprüfen, ob die Stichprobe mit der Grundgesamtheit übereinstimmt. D.h. bei unserm Beispiel, ob die Behauptung des Lieferanten stimmt und die Brote im Durchschnitt 1000 g schwer sind und eine Streuung von 15 g aufweisen. Weil die Stichprobe auch zufällig ist, muss man wieder eine % Zahl angeben, mit der man seine eigene Unsicherheit beschreibt. Dazu legt man wieder ein Signifikanz Niveau fest. Z.B. 5%. Dann kann man sagen: "Nur mit 5 % Wahrscheinlichkeit stimmt meine Stichprobe mit der Behauptung des Lieferanten überein." Dann schickt man die Sendung zurück. Nehmen wir an, die Stichprobe hätte einen Mittelwert von 983 ergeben. Zurückschicken?</p> <p>Abweichung = 17<br/>Anzahl Sigma = 17/15<br/>Anzahl Messungen 100 (Freiheitsgrade)<br/><math>T_{vert}(17/15;100;1) = 0.13</math></p> <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe mit der Behauptung des Lieferanten <i>übereinstimmt</i> ist 13 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie <i>nicht übereinstimmt</i> ist also 87 %. Nicht zurückschicken, weil die Wahrscheinlichkeit höher ist als das Niveau.</p> |
| <b>Aufgabe</b>         | Muss man zurückschicken, wenn man nur 20 Brote gewogen hat und der Mittelwert der Stichprobe 971 g ist?<br>(Ja 0.034 resp 96.6 %)  |



## $\chi^2$ -Test

Manchmal führt eine Behauptung dazu, dass mehrere Zahlen vorhergesagt werden: Z.B. unsere Behauptung "die Schätzung der Baumhöhen ist normal verteilt". Unsere Schätzung ist also die *Stichprobe* und die Behauptung "normal verteilt" mit  $\mu = 20$  und  $\sigma = 3.2$ . ist die *Grundgesamtheit*. Um die Behauptung zu testen muss jeder Häufigkeitswert mit der Voraussage der Normalverteilung verglichen werden. Dies leistet der  $\chi^2$  - Test. Wir betrachten die *relativen* Häufigkeiten und berechnen die Vorhersagen

|          | Stichpr. |  | Vorhers. |
|----------|----------|--|----------|
| 0-14     | 1/20     | Normvert(14;20;3.2;wahr)                               | 0.03     |
| 15,16    | 2/20     | Normvert(16;20;3.2;wahr) -<br>Normvert(14;20;3.2;wahr) | 0.075    |
| 17,18    | 5/20     | Normvert(18;20;3.2;wahr) -<br>Normvert(16;20;3.2;wahr) | 0.16     |
| 19,20    | 4/20     | Normvert(20;20;3.2;wahr) -<br>Normvert(18;20;3.2;wahr) | 0.23     |
| 21,22    | 3/20     | Normvert(22;20;3.2;wahr) -<br>Normvert(20;20;3.2;wahr) | 0.23     |
| 23,24    | 3/20     | Normvert(24;20;3.2;wahr) -<br>Normvert(22;20;3.2;wahr) | 0.16     |
| 25 und m | 2/20     | Normvert(50;20;3.2;wahr) -<br>Normvert(24;20;3.2;wahr) | 0.1      |

Schreiben Sie beide Zahlenreihen in je eine Spalte einer Excel-tabelle (A1:A7 resp. B1:B7) und wählen Sie  $f_x$   
Statistik/Chitest(A1:A7;B1:B7)  
Der Wert von 0.999 sagt, dass die Stichprobe mit der  
Voraussage exzellent übereinstimmt.



## 1.5 Entscheidungsbäume

### Neues Produkt einführen oder nicht?

Eine Firma hat ein neues Produkt und kann es jetzt auf den Markt werfen. Sie hat drei Optionen:

- Ohne wenn und aber lancieren
- Einen Test des Marktes durchführen und dann entscheiden
- Aufgeben, ohne wenn und aber

### Marktchancen

Auf Grund der Erfahrungen kann man drei Fälle von Nachfrage nach dem Produkt unterscheiden und ihnen die Wahrscheinlichkeiten und Gewinne aus untenstehender Tabelle zuschreiben.

### Test-Markt

Die Firma hat Erfahrung mit Test-Märkten und weiss, wenn ein solcher Test durchgeführt wird und er ergibt das Resultat "starke" Nachfrage, dass dann dies in 70% der Fälle tatsächlich auch zutrifft, in 20 % aber nur eine "schwache" und in 10 % sogar "keine" Nachfrage - trotz positivem Testresultat - vorhanden ist. Ergibt der Test eine ungünstige Voraussage (schwach oder inexsistente Nachfrage) dann ist die Nachfrage in 20% der Fälle doch stark, in 20% schwach und in 60% inexistent. Der Test kostet ca. 100 000 Fr. Die Tester vermuten dass die Wahrscheinlichkeit für eine günstiges Testresultat 60% sei.

### Analytische Entscheidungsfindung

Wie entscheidet man mit analytischen Methoden die Frage ob a) b) oder c)?

| Nachfrage  | Gewinn (in 1000) | Kein Test | Test: günstig | Test: ungünstig |
|------------|------------------|-----------|---------------|-----------------|
| Stark      | 1000             | 50        | 70            | 20              |
| Schwach    | 250              | 20        | 20            | 20              |
| Inexistent | -750             | 30        | 10            | 60              |

### Generelles Vorgehen

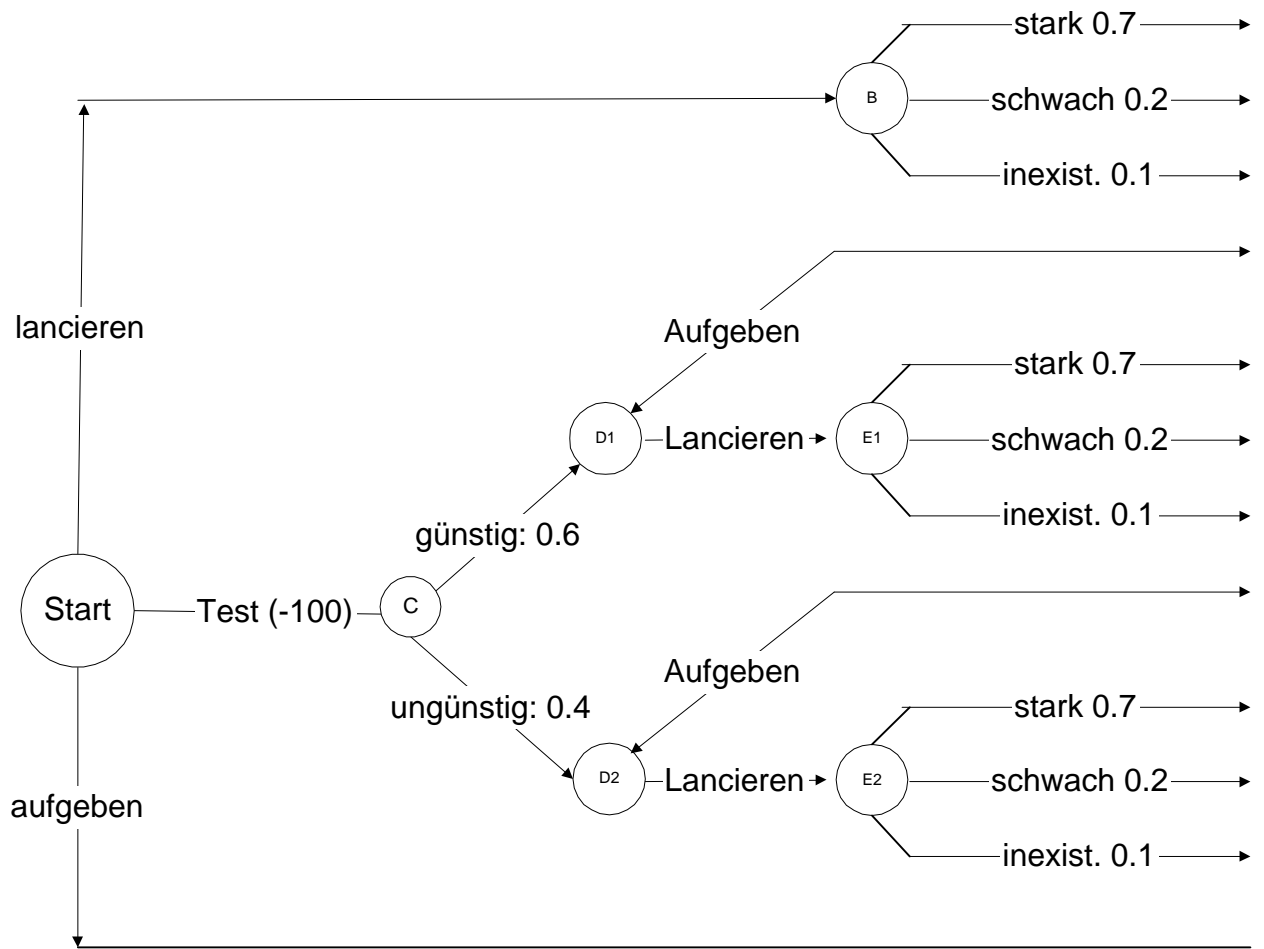
- Zeichnen Sie einen Entscheidungsbaum
- Setzen sie die Auszahlungen (Payoff) am Ende jedes Astes ein (1000/250/-750/ 0/1000/ 250/-750/ 0/ 1000/250/-750/0)
- Setzen Sie die Wahrscheinlichkeiten ein
- Roll-Back: rollen Sie den Baum von hinten auf und berechnen Sie an den Knoten die Gewinnerwartung. Z.B. bei B =  $1000 \cdot 0.5 + 250 \cdot 0.3 - 750 \cdot 0.3 = 325$  (E1:675, E2:-200, C: 405)
- 

### Resultat

Schliesslich erhalten Sie folgendes Resultat

- lancieren ohne wenn und aber: 325
- zuerst einen Testmarkt durchführen: 305 (405-100 Testm.)
- aufgeben, ohne wenn und aber: 0





## 1.6 Bedienungstheorie; Poissonv.

### Paradebeispiel Warteschlange

Wir nehmen an: Durchschnittlich alle 15 Minuten fahre ein Auto in eine Autowaschanlage. Der Waschvorgang würde 10 Minuten dauern. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass z.B. 3 Autos warten müssen?

### Poissonprozess: seltene Ereignisse

Ein solcher Prozess heisst *Poissonprozess*. Er weist zwei Merkmale auf: Die Ereignisse sind *zufällig und selten*.

### Intensität

Ein Poissonprozess wird durch eine einzige Zahl, die Intensität  $\lambda$ , charakterisiert. Sie beschreibt die Anzahl (Autos) pro Zeiteinheit (z.B. in einer Stunde).

### Poissonverteilung

Begriffe:  $\lambda = 4/60$  min Intensität  
T = Zeitintervall (5 min)  
N = Anzahl (3)

$$W(n,t) = \frac{(\lambda * t)^n}{n!} * e^{-\lambda * t}$$

### Exponentialverteilung der Wartezeit

Bei einem Poissonprozess kann man auch immer nach der *Wartezeit*, d.h der Zeit, die verstreicht bis das nächste Auto kommt, fragen. Sie ist exponential verteilt.

### Exponentialverteilung

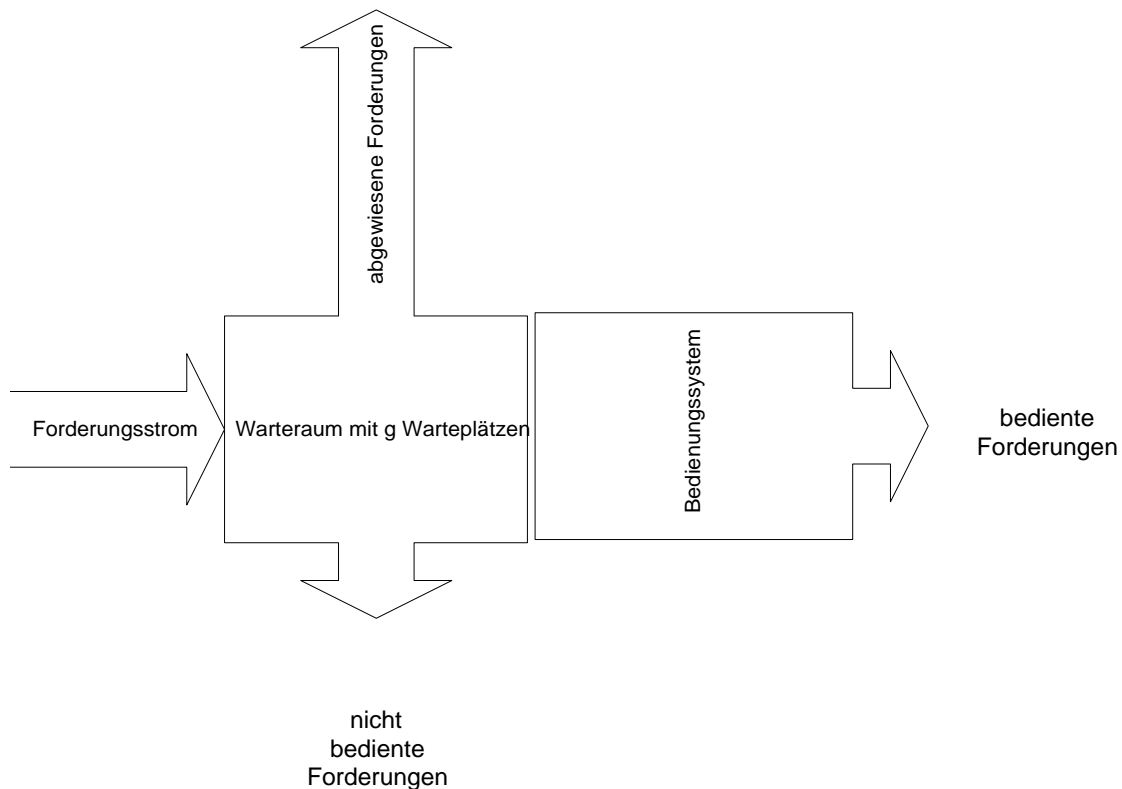
$$W(t) = e^{-\lambda * t}$$

### 1.6.1 Bedienungstheorie

Hauptanwendungsgebiet von Poissonprozessen ist die sogenannte Bedienungstheorie (W.Dück, Operationsforschung, S.346 ff). Beispiele sind:

- Kunden eines Dienstleistungs- oder Handelsunternehmens
- Ausgefallene Maschinen
- Telefonanrufe bei automatischer Vermittlung
- Schiffe in Häfen
- feindliche Flugzeuge
- zu treffende Entscheidungen





### Annahmen

Die folgende Darstellung geht davon aus, dass ein genügend grosser Warteraum vorhanden ist, und keine Kunden weg gehen, weil die Warteschlange zu lang ist. Zudem nehmen wir an, dass das System im Gleichgewicht ist und immer gleich viele Kunden kommen. Diese Bedingung ist oft nach ca. 1 Stunde erfüllt.

### Begriffe Forderungen

Unter Forderung versteht man Begriffe wie "ein Kunde kommt", der Dienstleister muss "bedienen", ein Mechaniker muss "reparieren" etc.

### Abfertigungsrate

Der Arbeiter im Bedienungssystem braucht ein bestimmte Zeit um einen Auftrag auszuführen, resp. die Forderung zu befriedigen. Die Bedienungszeit ist auch exponential verteilt mit der Abfertigungsrate  $\mu$  (= 1/10 min in unserm Bsp.)



|   |   |
|---|---|
| <b>Anzahl Forderungen</b>                   | Die durchschnittliche Anzahl der Forderungen (Erwartungswert) in der Bedienungseinheit berechnet sich nach:   |
|   | $\langle N \rangle = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$   |
| <b>Anzahl Wartende</b>                      |   |
|   | $\langle N_w \rangle = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$  |
| <b>Mittlere Verweilzeit in der Anlage</b>   |   |
|   | $\langle t_v \rangle = \frac{1}{\mu - \lambda}$   |
| <b>Mittlere Wartezeit bis zur Bedienung</b> |   |
|   | $\langle t_w \rangle = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$  |
| <b>Auslastung</b>                           | Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Forderung im System ist beträgt: $W(0) = 1 - \lambda/\mu$<br>Die Auslastung ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eine Forderung da ist also $1 - W(0) = \lambda/\mu$  |
| <b>Beispiel: Havarie</b>                    | Eine Firma, z.B. ein grosses Fitnesscenter, überlegt sich den Unterhalt seiner Maschinen. Aus Erfahrung wissen sie, dass täglich mit 3 Ausfällen einer Maschine zu rechnen ist (Öffnungszeit: 16 h). Der Prozess ist zufällig und selten. Die GL überlegt sich zwei Szenarien:<br>a) Outsourcing: eine externe Firma wartet die Maschinen: Durchschnittliche Reparaturzeit 3 h, Stundenansatz = 95 Fr.<br>b) Eigene Reparaturabteilung: Zweischichtbetrieb (16h), Lohnkosten: 63 Fr/h. Reparaturzeit 2.5 h<br><br>Der Ausfall einer Maschine während einer Stunde kostet wegen Engpässen und Goodwillverlust 500 Fr.<br><br>Welche Strategie soll die Firma wählen? |
| <b>Lösung:</b>                              | Wir betrachten die Zeit von 16 h.<br>$\lambda = 3/16h = 0.19$<br>$\mu = 1/3h = 0.33$ resp $1/2.5h = 0.4$  |
| <b>Variante a)</b>                          | Lohnkosten: $3 \cdot 3 \cdot 95 = 855$<br>Verweilkosten: Die Maschinen stehen im Durchschnitt $t_v$ Stunden still:<br>$\langle t_v \rangle = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{0.33 - 0.19} = 7.14$  |





Verweilkosten:  $3 \cdot 7.14 \cdot 500 = 10434$  (für drei Maschinen im Schnitt)

Totalkosten:  $855 + 10434 = 11289$

#### Variante b)

Lohnkosten:  $16 \cdot 63 = 1008$

Verweilkosten: Maschine steht im Durchschnitt  $t_v$  Stunden still:

$$\langle t_v \rangle = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{0.4 - 0.19} = 4.76$$

Verweilkosten:  $3 \cdot 4.76 \cdot 500 = 7050$  (für drei Maschinen im Schnitt)

Totalkosten:  $7050 + 1008 = 8058$

#### Fazit

Selbst wenn die externe Firma keine Lohnkosten erheben würde, wäre Variante a) immer noch schlechter, wegen der hohen Stillstandskosten!

#### Aufgabe: Überlastung?

Herr von Holzen ist der einzig Magaziner in einem Produktionsbetrieb. Er klagt, er sei überlastet. Die Mitarbeiter klagen über lange Wartezeiten. Wie sind diese Klagen zu beurteilen, wenn pro Stunde 15 MA etwas aus dem Lager holen und die Bedienungszeit 3 Min. pro Mitarbeiter beträgt?



## 1.7 Mehrkanalsystem

### Mehrkanalsystem

Falls in der beschriebenen Waschanlage mehrere Waschstrassen betrieben werden, so spricht man von einem Mehrkanalsystem. Als Beispiele könnte man in Betracht ziehen:

- Dienstleistungsunternehmen wie Supermarkt, Coiffeursalons (Kanäle: Anzahl Bedienung: Kassierin, Coiffeusen ...)
- Flugplatz mit mehreren Landebahnen, in dessen Luftraum nur einige wenige Maschinen die Landeerlaubnis abwarten können. Hier stellt sich die Frage nach der Anzahl der Landebahnen (= Kanäle)
- Intensivstation eines Krankenhauses als ein Sonderfall, in dem überhaupt keine Warteschlange entstehen darf. Es gilt dann  $N = k$ , und man sucht die Frage zu beantworten, wie viele Plätze (= Kanäle) die Intensivstation umfassen muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Notfall abgewiesen wird, einen sehr kleinen vorzugebenden Wert nicht überschreitet.
- Parkhaus mit seinen Stellplätzen (= Kanäle) als beschränktes Mehrkanalsystem auffassen. Sofern in den Strassen vor dem Parkhaus ein Warten auf freie Parkplätze des Parkhauses verboten ist. In diesem Fall werden  $k$  und  $N$  gross sein und sich nur wenig unterscheiden.

Die Berechnungen und Formeln werden einfacher, wenn man die "Verkehrsdichte"  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  einführt.

Zudem muss man im Mehrkanalsystem zuerst  $W(0)$ , die Wahrscheinlichkeit, dass keine Forderung im System ist, einführen.

Die Anzahl Kanäle bezeichnet man mit  $k$ . Es sind dies die Anzahl Zapfsäulen, die Zahl der bedienenden Personen usw.

### Auslastung

Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Forderung im System ist beträgt:

$$W(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \rho^n + \frac{\rho^k}{k! \left(1 - \frac{\rho}{k}\right)}}$$

Die Auslastung ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eine Forderung da ist also  $1 - W(0)$



**Anzahl Wartende**

$$\langle N_w \rangle = \frac{w(0)\rho^{(k+1)}}{k! * k * (1 - \frac{\rho}{k})^2}$$

**Anzahl Forderungen im System**

$$\langle N \rangle = \rho + \frac{w(0)\rho^{(k+1)}}{k! * k * (1 - \frac{\rho}{k})^2}$$

**Mittlere Verweilzeit in der Anlage**

$$\langle t_v \rangle = \frac{\langle N \rangle}{\lambda}$$

**Mittlere Wartezeit bis zur Bedienung**

$$\langle t_w \rangle = \frac{\langle N_w \rangle}{\lambda}$$

**Beispiel:  
Auslieferungslager**

Im Auslieferungslager einer Firma arbeiten drei Herren zur Abfertigung der Kunden. Durchschnittlich kommen 20 Kunden an einem 8 - Stundentag. Ein Kunde nimmt im Mittel 40 Minuten in Anspruch. Wie viele Kunden warten. Wie viele Kunden sind im System. Wie lange verweilt ein Kunde im Auslieferungslager?

**Lösung:**

$$\begin{aligned} W(0) &= 17.2 \% \\ \langle N_w \rangle &= 0.37 \\ \langle N \rangle &= 2.03 \\ \langle t_v \rangle &= 49 \text{ Minuten} \end{aligned}$$



## 1.8 Treffer, Niete; Binomialvert.

Oft kann man Produkte nur prüfen, indem man sie verbraucht. Erfüllen sie dann die Erwartungen, spricht man von *Treffer*. Erfüllen sie die Erwartungen nicht, spricht man von *Niete*. Weil die Produkte beim Testverfahren aufgebraucht werden, kann man nicht beliebig viele Produkte testen.

**Binomialverteilte Prozesse** Prozesse bei denen es um Treffer oder Nieten geht, kann man mit dem Modell der *Binomialverteilung* beschreiben.

**Modellbeispiel:  
Glühlampen** Ein Einkäufer testet Glühlampen. Der Lieferant behauptet: Mehr als 95 % der Lampen brennen mindestens 1000 Stunden. Der Einkäufer lässt 20 Lampen 1000 Stunden lang brennen. Zwei Lampen löschen aus (Nieten). Ist damit die Behauptung des Lieferanten mit 95 % Wahrscheinlichkeit widerlegt?

**Trefferwahrscheinlichkeit**  $P(\text{Treffer}) = 0.95 = p$   
 $P(\text{Niete}) = 0.05 = q$

**Binomialverteilung** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 20 Lampen nach 1000 Stunden noch brennen?  
 $P(0) = (0.95)^{20}$   
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 20. Lampe grad eine Niete ist?  
 $P(\text{zwanzigste}) = (0.95)^{19} * 0.05$   
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine der 20. Lampen eine Niete ist? (Es kann die erste, zweite, dritte....zwanzigste sein. Es gibt also 20 günstige Fälle.  
 $P(1) = 20 * (0.95)^{19} * 0.05 = B_{0.05}(1)$   
Falls zwei, drei, etc Nieten möglich sind, wird die Berechnung der Fälle schwierig.  
Bei einer Kette von n Gliedern (20), k faule Glieder (3) finden kann man in folgender Anzahl Fälle:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

**Formel  
Binomialverteilung**

$$B_q^n(k) = \frac{n!}{(n-k)!} p^{n-k} q^k$$

**Mit Excel** BINOMVERT(17;20;0.95;falsch)= 0.0596  
unter 20 getesteten Lampen genau drei Nieten, resp. 17 Treffer zu finden.



## Lösung Glühlampen

Der Einkäufer fragt sich, wie wahrscheinlich es ist, *zufällig* zwei oder mehr Nieten zu finden, wenn der Verkäufer Recht hat. Ist diese Wahrscheinlichkeit grösser als 5 %, dann behält er die Ware.

$\text{BINOMVERT}(17;20;0.95;\text{wahr})= 0.075$  -> er behält die Birnen

Was, wenn drei Birnen kaputt gegangen wären?

$\text{BINOMVERT}(16;20;0.05;\text{wahr})=0.016$  -> das akzeptiert er nicht mehr.



## 1.9 Übungen

### a) Tankstelle mit einer Zapfsäule

Wir betrachten eine Tankstelle mit einer einzigen Zapfsäule als Wartesystem. Als Ankunftsrate sei für alle Kunden ein Wert von 1,2 [Kunden je Zeiteinheit] gemessen worden. Diese Zeiteinheit (ZE) betrage 10 Minuten und sei auch Bezugsgrösse der Abfertigungsrate von 2,0 [Kunden/ZE]. Mit anderen Worten, zur Abfertigung eines Kunden werden im Mittel  $1/\mu = 1/2[\text{ZE}] = 5 \text{ min}$  benötigt.

Berechnen Sie:

1. die mittlere Anzahl von Kunden im Gesamtsystem
2. die mittlere Anzahl von Kunden, die auf Bedienung warten
3. die Zeit, die ein Kunde im Durchschnitt insgesamt im System verbringt
4. die Zeit, die ein Kunde im Durchschnitt auf Bedienung warten muss
5. Zu wieviel % ist die Tankstelle ausgelastet?

### b) Tankstelle als Zweikanalsystem

Wenn wir im oben behandelten Tankstellenbeispiel eine zusätzliche Zapfsäule vorsehen, erhalten wir ein beschränktes Mehrkanalsystem. Das gilt jedoch nur, wenn aus beiden Zapfsäulen die gleiche Kraftstoffqualität abgegeben wird. Für diesen Fall ( $k=2$ ) wollen wir nachstehend mit den Daten von oben

- Ankunftsrate: 1,2 [Kunden je ZE],
- Abfertigungsrate für einen Kanal 2,0 [Kunden je ZE].
- Systemgrösse  $N=4$  [Kunden]
- 1 [ZE] = 10 [min]

die charakteristischen Kenngrössen ausrechnen.

Berechnen Sie:

- die mittlere Anzahl von Kunden im Gesamtsystem
- die mittlere Anzahl von Kunden, die auf Bedienung warten
- die Zeit, die ein Kunde im Durchschnitt insgesamt im System verbringt
- die Zeit, die ein Kunde im Durchschnitt auf Bedienung warten muss
- Zu wieviel % ist die Tankstelle ausgelastet?



## 1.10 Lösungen zu den Übungen

- 1) die mittlere Anzahl von Kunden im Gesamtsystem:  
 $0.12/0.08 = 1.5$
- 2) die mittlere Anzahl von Kunden, die auf Bedienung warten  
0.9
- 3) die Zeit, die ein Kunde im Durchschnitt insgesamt im System verbringt 12.5 (min)
- 4) die Zeit, die ein Kunde im Durchschnitt auf Bedienung warten muss 7.5 min
- 5) Zu wieviel % ist die Tankstelle ausgelastet? 60%
- 6)

Interpretiert man dieses Ergebnis unter Berücksichtigung ökonomischer Kategorien, so könnte man z.B. zu der Ansicht gelangen, es sei zweckmässig, die Abfertigung zu beschleunigen (d.h.  $\mu$  zu vergrössern). Dadurch könnte nämlich der Verlust von potentiellen Kunden verringert werden. Das würde bedeuten, dass sich der Umsatz und damit in der Regel auch der Gewinn vergrössern würden. Zur Beschleunigung der Abfertigung wäre aber andererseits der Einbau einer stärkeren Pumpe in die Zapfsäule erforderlich. d.h. eine Investition wäre durchzuführen. Insgesamt gesehen wären schliesslich die Kosten dieser Investition mit den Ertragszuwachsen aufgrund der beschleunigten Abfertigung zu vergleichen.

**b) Tankstelle mit mehreren Kanälen**



## 2 Entscheidungstheorie

### 2.1 Musterbeispiel

#### Beispiel

Herstellung von Drehzahlwandlern.  
(Die folgende Darstellung stammt aus Zimmermann, Operations Research, Oldenbourg, 1999)

Ein Hersteller von Drehzahlwandlern hat drei verschiedene alternative Bauweisen anzubieten: Mechanische, hydraulische und elektrische Drehzahlwandler. Eine Marktstudie ergab folgende Wahrscheinlichkeiten bezüglich der Nachfrage bzw. des Bedarfs:

- 10% Wahrscheinlichkeit für geringe Nachfrage
- 70% Wahrscheinlichkeit für mittlere Nachfrage
- 20% Wahrscheinlichkeit für grosse Nachfrage.

Der Hersteller strebt Gewinnmaximierung an und hat deshalb die Gewinne für jedes Produkt in Abhängigkeit von der unterschiedlichen Nachfrage ermittelt. Welche Drehzahlwandler sollten hergestellt werden, wenn jeweils nur eine Bauweise möglich ist?

|                   |          | mech. Drehzahlw. |          | Hydr. Drehzahlw. |          | El. Drehzahlw. |          |
|-------------------|----------|------------------|----------|------------------|----------|----------------|----------|
| Nachfr.           | Wahrsch. | Gewinn           | Erw.wert | Gewinn           | Erw.wert | Gewinn         | Erw.wert |
| gering            | 0.1      | 25               | 2.5      | -10              | -1       | -125           | -12.5    |
| mittel            | 0.7      | 400              | 280      | 440              | 308      | 400            | 280      |
| stark             | 0.2      | 650              | 130      | 740              | 148      | 750            | 150      |
| Gesamter Erw.wert |          | 412.5            |          | 455              |          | 417.5          |          |

#### Aktion

Die Handlung des Unternehmers nennt man *Aktion*.

#### Ereignis

Die Reaktion des Marktes nennt man *Ereignis*.

#### Entscheidungsregeln

Die Grundsätze, Richtlinien oder Zielgrößen von der sich der Entscheidende bei der Wahl der optimalen Aktion leiten lässt werden als *Entscheidungskriterien*, *Entscheidungsregeln* oder *Entscheidungsprinzipien* bezeichnet. Je nach dem wie viele Informationen im konkreten Fall vorliegen oder für die Beurteilung der möglichen Aktionen herangezogen werden, spricht man von Kriterien mit *einem* oder *mehreren Parametern*.

#### Ungewissheitssituationen

Bei Ungewissheitssituationen ist nur die Auszahlungsmatrix nicht aber die Ereigniswahrscheinlichkeit bekannt; hier können nur Kriterien ohne Berücksichtigung der Ereigniswahrscheinlichkeiten, sogenannte *Ein - Parameter - Kriterien*, herangezogen werden.





## 2.2 Ein - Parameter Regeln

### Maximax-Regel

Als optimale Aktion wird diejenige mit *maximal möglicher* Auszahlung angesehen; man orientiert sich dabei an der Auszahlung, die sowohl das Maximum der Zeilen als auch der Spalten ist.

|                  | mech. Drehzahlw. | Hydr. Drehzahlw. | Elektr. Drehzahlw. |
|------------------|------------------|------------------|--------------------|
| Nachfr.          | Gewinn           | Gewinn           | Gewinn             |
| gering           | 25               | -10              | -125               |
| mittel           | 400              | 440              | 400                |
| stark            | 650              | 740              | 750                |
| Maxima           | 650              | 740              | 750                |
| Maxima d. Maxima |                  |                  | 750                |

Optimale Aktion der Maximax Regel: Herstellung von elektrischen Wandlern

Die Maximax-Regel unterstellt dem Entscheidenden eine extrem risikofreudige Haltung, insofern als sie sich am maximal möglichen Ergebnis orientiert. Nur im günstigsten Fall (hier: grosse Nachfrage) wird dieses Ergebnis aber auch erreicht.

### Maximin-Regel

Hier wird das *schlechteste* Ergebnis (Minimum der Auszahlung) einer jeden Aktion zur Grundlage der Auswahl herangezogen und diejenige Aktion gewählt, welche noch die beste von diesen schlechten Ergebnissen (Maximum der Minima) aufweist.

|                  | mech. Drehzahlw. | Hydr. Drehzahlw. | Elektr. Drehzahlw. |
|------------------|------------------|------------------|--------------------|
| Nachfr.          | Gewinn           | Gewinn           | Gewinn             |
| gering           | 25               | -10              | -125               |
| mittel           | 400              | 440              | 400                |
| stark            | 650              | 740              | 750                |
| Minima           | 25               | -10              | -125               |
| Maxima d. Minima | 25               |                  |                    |

Das Maximum der Minima ist demzufolge: 25. Also soll man den mechanischen Wandler produzieren.



Die Maximin-Regel unterstellt dem Entscheidenden eine extrem risikoscheue Haltung, da sie sich an der Auszahlung im ungünstigsten Fall orientiert. Die Maximin - Regel ist auch in der Theorie der Spiele als Sattelpunktkriterium bekannt.

Nach Eintreffen des tatsächlichen Ereignisses sind Abweichungen nur in Richtung besserer Ergebnisse möglich; man kann also nur angenehme Überraschungen erwarten, falls das erwartete Ereignis nicht eintritt.

### Beispiel

Durch ein weiteres Beispiele soll die Wirkung einer strengen Orientierung an der Maximin-Regel näher erläutert werden.

|             | A1 | A2   |
|-------------|----|------|
| Ereignis E1 | 0  | -10  |
| Ereignis E2 | 10 | 1000 |

Optimale Aktion nach der Maximin-Regel wäre A1. Es ist jedoch ohne weiteres einzusehen, dass A2 die günstigere Aktion ist, wenn wenigstens eine geringe Wahrscheinlichkeit für E2 vorliegt. Derjenige, der sich an der Maximin - Regel orientiert, verzichtet auf die Möglichkeit Fr 1000, - zu gewinnen, nur weil er einen Verlust von Fr 10, - vermeiden möchte; um einen Verlust von nur Fr 10, - zu vermeiden, entscheidet er sich für eine Aktion, die ihm wenigstens den „Status quo“ garantiert. Die Maximax-Regel würde hier zur Aktion A2 führen.

Das Maximin - Kriterium ist ein ausserordentlich konservatives Entscheidungskriterium und kann zu sehr schlechten Entscheidungen führen, da es Aktionen mit höherem Risiko gegenüber vergleichsweise risikofreien, jedoch weitaus weniger attraktiven Aktionen, unterbewertet und vernachlässigt. Geschäftsleute, die sich ausschliesslich und streng nach diesem Kriterium richten, würden sich aus dem Markt herausoperieren. Es würden keine Vorräte angelegt, weil man nicht sicher ist, dass einige zu Ladenhütern werden. Es würden keine neuen Produkte entwickelt, da man nie ganz sicher sein kann, dass sie auch vom Markt angenommen werden usw.

### Hurwicz-Regel

Während sich die Maximax-Regel an dem besten Ergebnis einer Aktion und die Maximin - Regel an dem schlechtesten Ergebnis einer Aktion orientiert, versucht die Hurwicz - Regel den Optimismus der ersten und den Pessimismus der zweiten Regel dadurch abzumildern, dass sie beide Grenzwerte berücksichtigt und mittels einer Grösse  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) eine lineare Mischung aus beiden bildet.

$$\text{Wahl} = \text{Maximum von } (\alpha \cdot \text{max} + (1-\alpha) \cdot \text{min})$$



nehmen wir  $\alpha = 0.5$  an:

|                   | mech. Drehzahlw. | Hydr. Drehzahlw. | Elektr. Drehzahlw. |
|-------------------|------------------|------------------|--------------------|
| Nachfr.           | Gewinn           | Gewinn           | Gewinn             |
| gering            | 25               | -10              | -125               |
| mittel            | 400              | 440              | 400                |
| stark             | 650              | 740              | 750                |
| $\alpha$ *maxi    | 325              | 370              | 375                |
| $(1-\alpha)$ *min | 12.5             | -5               | -62.5              |
| Summe             | 337.5            | 365              | 312.5              |
| Maxima d. Summen  |                  | 365              |                    |

Für  $\alpha = 1$  geht die Regel in die Maximax-Regel über für  $\alpha = 0$  ergibt sich die Maximin-Regel.

Man beachte, dass die Hurwicz - Regel die gegebenen Informationen besser ausschöpft als die bisher betrachteten Kriterien. Wird  $\alpha = 0,5$  gewählt, so hält der Entscheidende die zum besten und zum schlechtesten Ergebnis führenden Ereignisse für gleich wahrscheinlich. Durch die Wahl des  $\alpha$  werden hier also subjektive Wahrscheinlichkeitswerte (Glaubwürdigkeitsangaben) für die beiden Extremfälle angesetzt.



## Laplace-Regel

Diejenige Aktion, die im Durchschnitt die höchste Auszahlung erwarten lässt, wird hier als optimale angesehen.

|              | mech. Drehzahlw. | Hydr. Drehzahlw. | Elektr. Drehzahlw. |
|--------------|------------------|------------------|--------------------|
| Nachfr.      | Gewinn           | Gewinn           | Gewinn             |
| gering       | 25               | -10              | -125               |
| mittel       | 400              | 440              | 400                |
| stark        | 650              | 740              | 750                |
| Durchschnitt | 358,33           | 390              | 341.6              |
| Maximum      |                  | 390              |                    |

Man bestimmt also für jede Aktion den einfachen Mittelwert der Auszahlungen bei den verschiedenen Ereignissen. Es werden somit alle Ereignisse für gleichwahrscheinlich gehalten und deshalb gleichgewichtig im Mittelwert berücksichtigt.

**Minimax - Regret - Regel** Niehans und Savage schlagen vor, das nachträgliche Bedauern (die Entscheidungsreue) über eine Fehlentscheidung als Massstab für die Entscheidung heranzuziehen und diejenige Aktion zu wählen, bei der das nachträgliche Bedauern minimiert wird. Der *Regretbetrag*, der *Opportunitätsverlust* (loss of foregone opportunity) ist der Auszahlungsbetrag, der dem Entscheidenden dadurch entgangen ist, dass er nicht die Aktion mit der grössten Auszahlung bei dem tatsächlich eingetretenen Ereignis gewählt hat.

**Opportunitätsverlust** Der Regretbetrag ist die Differenz zwischen dem Maximum der Auszahlung bei jedem möglichen Ereignis (Zeilenmaximum) und jeder Auszahlung in der Zeile.

|                      | mech. Drehzahlw. | Hydr. Drehzahlw. | Elektr. Drehzahlw. |
|----------------------|------------------|------------------|--------------------|
| Nachfr.              | Gewinn           | Gewinn           | Gewinn             |
| gering               | 25               | -10              | -125               |
| mittel               | 400              | 440              | 400                |
| stark                | 650              | 740              | 750                |
| Regretbetrag: gering | $25-25=0$        | $25+10=35$       | $25+125=150$       |
| Regretbetrag: mittel | $440-400=40$     | $440-440=0$      | $440-400=40$       |
| Regretbetrag: stark  | $750-650=100$    | $750-740=10$     | $750-750=0$        |
| Summe                | 140              | 45               | 190                |
| Durchschnitt         | 46.6             | 15               | 63.3               |

Der hydraulische Wandler erzeugt im Durchschnitt die geringste Entscheidungsreue.



## 2.3 Zwei - Parameter - Regeln

### Maximum Likelihood

Diejenige Aktion, die bei der grössten Wahrscheinlichkeit die höchste Auszahlung erwarten lässt, wird als optimal angesehen.

|                     | Wahrsch. | mech. Drehzahlw. | Hydr. Drehzahlw. | Elektr. Drehzahlw. |
|---------------------|----------|------------------|------------------|--------------------|
| Nachfr.             |          | Gewinn           | Gewinn           | Gewinn             |
| gering              | 0.1      | 25               | -10              | -125               |
| mittel              | 0.7      | 400              | 440              | 400                |
| stark               | 0.2      | 650              | 740              | 750                |
| bei max. W.         |          | 400              | 440              | 400                |
| Maxima d.<br>Maxima |          |                  | 440              |                    |

Bei Verwendung dieser Entscheidungsregel werden die vorhandenen Informationen nur in bescheidenem Masse genutzt. Auszahlungen und Wahrscheinlichkeiten der weniger wahrscheinlichen Ereignisse werden gar nicht in die Betrachtung einbezogen. Selbst dann, wenn das wahrscheinlichste Ereignis weniger wahrscheinlich als die Summe der anderen Ereignisse ist, orientiert man sich nur an dem wahrscheinlichsten Einzelereignis.

### Bayes Regel: Erwartungswert

Die Bayes-Regel vermeidet die begrenzte Auswahl nur einiger Werte aus der Anzahlungsmatrix durch Bildung des mit den Wahrscheinlichkeiten gewichteten Mittelwertes jeder Aktion, des sogenannten *Erwartungswertes*. Als optimale Aktion wird diejenige mit dem maximalen Erwartungswert der Auszahlung oder dem minimalen Erwartungswert der Kosten angesehen.

|                   |          | mech. Drehzahlw. |          | Hydr. Drehzahlw. |          | Elektr. Drehzahlw. |          |
|-------------------|----------|------------------|----------|------------------|----------|--------------------|----------|
| Nachfr.           | Wahrsch. | Gewinn           | Erw.wert | Gewinn           | Erw.wert | Gewinn             | Erw.wert |
| gering            | 0.1      | 25               | 2.5      | -10              | -1       | -125               | -12.5    |
| mittel            | 0.7      | 400              | 280      | 440              | 308      | 400                | 280      |
| stark             | 0.2      | 650              | 130      | 740              | 148      | 750                | 150      |
| Gesamter Erw.wert |          | 412.5            |          | 455              |          | 417.5              |          |



## 2.4 Nutzwertanalysen

### Nutzwert

Bei extrem risikobehafteten Entscheidungen urteilen verschiedene Personen nicht aufgrund der Auszahlungen, sondern nach persönlichen Präferenzen. Die Bayes Regel ist hier nicht adäquat, man orientiert sich besser am persönlich gewichteten Nutzen, den eine Auszahlung bringt. Als Beispiel soll ein Feuer-Versicherungsschutz analysiert werden. Hier tritt das Schadenereignis nur mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit ein.

|                   |         | Mit Versicherung |        | Ohne Versicherung |          |
|-------------------|---------|------------------|--------|-------------------|----------|
| Ereignis          | Wahrsch | Prämie           | Erw.w. | Schaden           | Erw.wert |
| Feuer             | 0.002   | -100             | -0.2   | -40 000           | -80      |
| Kein F.           | 0.998   | -100             | -99.8  | 0                 | 0        |
| Gesamter Erw.wert |         | - 100            |        | -80               |          |

### Nutzwertanalyse Bernoulli-Regel

Nach der Bayes Regel wäre hier Verzicht auf Versicherungsschutz angezeigt. Es gibt aber verschiedene persönliche Gründe –z.B. ruhiger Schlafen zu können – der den Unternehmer zum Abschluss eines Versicherungsschutzes bewegt. Diesen persönlich bedingten Nutzen einer Auszahlung, eines Ereignisses, kann man mit einer Zahl bewerten: *Nutzenwert*.

Der Basler Mathematiker Daniel Bernoulli hat schon um 1700 eine Formel für die Bestimmung des Nutzwertes vorgeschlagen: Den Logarithmus der Auszahlung

|                   |          | Ohne Versicherung |        |          | Mit Versicherung. |        |          |
|-------------------|----------|-------------------|--------|----------|-------------------|--------|----------|
| Ereignis          | Wahrsch. | Prämie            | Nutzen | Erw.wert | Schaden           | Nutzen | Erw.wert |
| Feuer             | 0.002    | -100              | - 2    | -0.004   | -40000            | - 4.6  | -0.009   |
| Kein F.           | 0.998    | -100              | 0      | 0.0      | 0                 | 0      | 0        |
| Gesamter Erw.wert |          | -0.004            |        |          | -0.009            |        |          |

Mit der Bernoulli Regel würde man also einen Versicherungsschutz wählen.

